Corrigé Examen 2013

1 - Zero range process

1 - On choisit un site au hasard
Probabilité a priori $\frac{1}{L}$
Probabilité de choisir une particule
(ou matrice de transition)

$$W(i \to i+1) = \frac{1}{L} \frac{u(n_i)}{\Sigma(n_i)}$$

2 - On remplace $\frac{1}{L}$ par $\frac{1}{\sum_i \delta(u(n_i))}$

si on remplace $\frac{1}{L}$ par $\sum_i \delta(u(n_i))$, on peut par un changement de variable changer le pas de temps constant en pas variable et le régime stationnaire est le même, mais tous les mouvements sont acceptés

3 - Quand $u(n) = n$, on a

$$W(i \to i+1) = \frac{1}{\sum \delta(u(n_i))} \frac{n}{N}$$

cela correspond à choisir une particule au lieu d'un site

$$\frac{dp(\dots n_\mu, \dots)}{dt} = \sum_{\mu=1}^{L} u(n_{\mu-1}+1)\, p(\dots, n_{\mu-1}+1, n_\mu - 1) - u(n_\mu) p(\{n_\mu\}) \theta($$

La probabilité qu'un site change de nombre de particules est égale à la différence entre la probabilité d'avoir le site $\mu-1$ qui avait $n_{\mu-1}+1$

particule et qui laisse partir une particule avec la probabilité d'avoir une particule du site μ qui perd une particule

5 Le bilan détaillé s'écrit

$$W(n_{\mu-1} \to n_{\mu}) \cancel{u(n_{\mu-1}+1)}\, p(\ldots n_{\mu-1}+1, n_\mu - 1)$$

$$= \cancel{u(n_\mu)}\, p(n_\mu)\, \underset{\shortparallel}{W(n_\mu \to n_{\mu-1})}$$

~~Le~~ membre de droite est nulle car la particule ne peut sauter à gauche

le membre de gauche est différent de 0

6. $$\sum_\mu u(n_{\mu-1}+1) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq \mu, \mu-1}}^{L} f(n_l)\, f(n_{\mu-1}+1)\, f(n_\mu - 1) =$$

$$= \sum_\mu u(n_\mu)\, p \prod_{l=1}^{L} f(n_l) = 0$$

$\forall$ vrai $\mu \Rightarrow$

$$u(n_{\mu-1}+1)\, f(n_{\mu-1}+1)\, f(n_\mu - 1)$$

$$= u(n_\mu)\, f(n_\mu)\, f(n_{\mu-1})$$

7 En divisant par $f(n_\mu) \times f(n_{\mu-1})$

on a $$\frac{u(n_{\mu-1}+1)\, f(n_{\mu-1}+1)}{f(n_\mu)} = \frac{u(n_\mu)\, f(n_\mu)}{f(n_{\mu-1})}$$

qui est indépendante de n_μ

$$\frac{u(n_{\mu-1}+1)\, f(n_{\mu-1}+1)}{f(n_\mu)} = C$$

1.8 $f(n_\mu) = \dfrac{f(n_\mu - 1)}{u(n_\mu)}$

$$f(n_\mu) = \prod_{i=1}^{n_\mu} \frac{1}{u(n_\mu)}$$

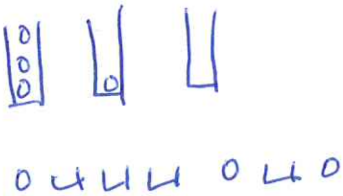
1.9 ~~Ensuite~~ En utilisant

$$p(\{n_\mu\}) = \frac{1}{Z_{NL}} \prod_{\mu=1}^{L} f(n_\mu) = \frac{1}{Z_{NL}} \prod_{\mu=1}^{L} \prod_{i=1}^{n_\mu} \frac{1}{u(n_i}$$

$$\sum p(\{n_\mu\}) = 1$$

with $\sum n_\mu = N$

$$Z(L,N) = \sum_{\{n_\mu\}} \prod_{\mu=1}^{L} f(n_i)\, \delta\left(\sum n_\mu - N\right)$$

1.10 

1.11 $N + L$ sites

1.12 $u(n) = 1$ $u(0) = 0$

Probabilité de déplacer un site occupé sur un site déjà occupé égale à zéro dans le TASEP = probabilité de déplacer une boîte vide vers une boîte vide.

Probabilité de vider une particule d'une boîte (ZRP) une particule = probabilité d'avancer une particule dans le TASEP

2.1 $$\frac{dH'}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i}{m_i}\frac{d\vec{p}_i}{dt} - \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \frac{dp_\eta}{dt}\frac{p_\eta}{Q}$$

$$+ L k_B T \frac{d\eta}{dt}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i}{m_i}\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{r}_i}{dt}\left(\vec{F}_i - \frac{p_\eta}{Q}\vec{p}_i\right)$$

$$\frac{dH'}{dt} = -\frac{p_\eta}{Q}\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{r}_i}{dt} * \frac{\vec{p}_i}{Q} + \frac{p_\eta}{Q}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{m_i} - L k_B \right.$$

$$+ L k_B T \frac{d\eta}{dt}$$

$$= -\frac{p_\eta}{Q} LkT + L k_B T \frac{d\eta}{dt} = 0$$

2.2 $$Z(N,V,E_1) = \int dp^N dr^N dp_\eta \, d\eta \, e^{dN\eta}\,\delta(H' - E_1)$$

$$Z(N,V,E_1) = \int dp^N dr^N \int dp_\eta \, e^{dN\frac{E_1 - H(r^N,p^N) + \frac{p_\eta^2}{2Q}}{LkT}}$$

$$Z(N,V,E_1) = \sqrt{2\pi Q L k T}\, e^{\frac{dNE_1}{LkT}} \int dp^N dr^N e^{-\frac{dN}{L}\frac{H(r^N,p^N)}{kT}}$$

En prenant $L = dN$ on retrouve la fonction de partition canonique de N particules à un facteur multiplicatif près.

2.3 $$\sum_{i=1}^{N} \dot{p}_i = -\frac{p_\eta}{Q}\sum p_i$$

$$\dot{\vec{P}} = -\frac{p_\eta}{Q}\vec{P} = -\dot{\eta}\vec{P}$$

on multiplie par e^{η}

$$e^{\eta}\dot{\vec{P}} = -e^{\eta}\dot{\eta}\vec{P}$$

$$\frac{d(e^{\eta}\vec{P})}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} e^{\eta} = \vec{K}$$

2.3 $\vec{p}_i = \vec{p}'_i + m_i \frac{\vec{P}}{M} \qquad i = 1, N-1$

Pour ~~la~~ la dernière on utilise $\sum_{i=1}^{N-1} p'_i + p'_N = 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{p}_N = -\sum_{i=1}^{N-1} p'_i + \frac{m_N}{M}\vec{P}$$

La matrice est

$$\begin{pmatrix} \vec{p}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{m_1}{M} \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & \frac{m_2}{M} \\ & & & & \\ & & & 1 & \frac{m_{N-1}}{M} \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \frac{m_N}{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p}'_i \\ \\ \vec{P} \end{pmatrix}$$

en prenant la colonne la plus à droite

on calcule le determinant facilement

$$\det(\ ) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{m_N} = 1$$

on a bien une transformation canonique

2.4 En utilisant les relations établies à la question précédente

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m_i} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2m_i}\left(\vec{p}'_i + m_i \frac{\vec{P}}{M}\right)^2 + \frac{1}{2m_N}\left[-\sum_{i=1}^{N-1} \vec{p}'_i + \frac{m_N}{M}\vec{P}\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\vec{p}'^{\,2}_i}{2m_i} + \sum_{i=1}^{N-1} \vec{p}'_i \frac{\vec{P}}{M} + \sum_{i=1}^{N-1} m_i \frac{\vec{P}^2}{M^2}$$

$$+ \frac{1}{2m_N}\left[\left[\sum_{i=1}^{N-1} p'_i\right]^2 - 2\sum_{i=1}^{N-1} m_N \frac{p'_i P}{M} + \frac{m_N^2 P^2}{M^2}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\vec{p}'^{\,2}_i}{2m_i} + \frac{1}{2m_N}\left(\sum_{i=1}^{N-1} \vec{p}'_i\right) + \frac{\vec{P}^2}{2M}$$

$\sum^{N-1} \cancel{m_i} \frac{\vec{P}}{M} \cancel{\frac{\vec{P}}{M}}$

2.5 $$\frac{d\vec r_i}{dt} = \frac{d\vec r_i'}{dt} + \vec V = \frac{\vec p_i}{m_i}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec r_i'}{dt} = \frac{\vec p_i'}{m_i}$$

$$\frac{d\vec p_i'}{dt} = \frac{d\vec p_i}{dt} - m_i \frac{d\vec V}{dt}$$

$$= \vec F_i - \frac{p_\eta}{Q} \vec p_i' - m_i \frac{d\vec V}{dt}$$

$$= \vec F_i - \frac{p_\eta}{Q} \vec p_i' - \frac{m_i}{M}\Big[\dot\eta \vec P + \underbrace{\dot{\vec P}}_{=0}\Big]$$

les deux dernieres equations sont les mêmes

2.6 On intègre sur η ou utilise $\delta(f(x)) = \dfrac{\delta(x-x_0)}{f'(x_0)}$

$$Z(N,V,E_1,K) = \int d^{N-1}p' \, dP \, d^{N-1}r' \int dp_\eta \left(\frac{K}{P}\right)^{d(N-1)+1} \delta\left(H(p',r') + \frac{p_\eta^2}{2Q} + LkT \ln\left(\frac{K}{P}\right)\right)$$

$$Z(N,V,E_1,K) = \int d^{N-1}p' \, dP \, d^{N-1}r' \left[\left(\frac{K}{P}\right)^{d(N-1)+1} \frac{Q}{p_\eta}\right]$$

avec $p_\eta = \sqrt{\left[E_1 - LkT \ln\left(\frac{K}{P}\right) - H(p',r')\right] 2Q}$

on a le resultat demandé

2.7 Particule libre $p = P$ $\quad H(p',r') = \dfrac{p^2}{2m}$

$f(P, E_1, K)$ correspond à l'intégrand

2.7 $d = 1$ $N = 1$

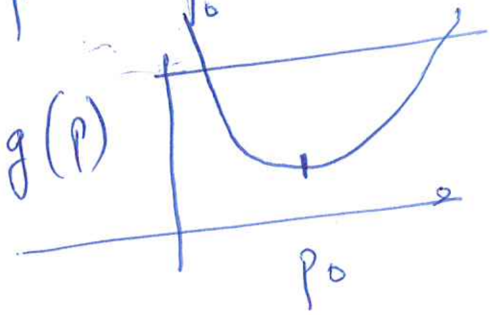
on a $f(p, E_1, K) \approx \dfrac{K}{p} \dfrac{1}{\sqrt{E_1 - \dfrac{p^2}{2m} + \ln\left(\dfrac{p}{K}\right) \times L k_B T}}$

$$g(p) = \frac{p^2}{2m} - L k_B T \ln\left(\frac{p}{K}\right) \Rightarrow$$

$$g'(p) = \frac{p}{m} - \frac{L k_B T}{p}$$

$g'(p) = 0$ pour $p_0 = \sqrt{L k_B T m}$

on a



Pour des quantités de mouvement trop faibles ou trop grandes, $f(p, E_1, K)$ n'est pas définie